Liste der wichtigsten quantorenlogischen Schlussregeln

$A(v)$ und $B(v)$ sind offene Schemata, in denen die Variable v vorkommt; $A(t)$, $B(t)$ bzw. $A(s)$, $B(s)$ sind Q-Formeln, in denen der Namenbuchstabe t bzw. s vorkommt.

Regeln des GLK$_Q$

Zu den Regeln des GLK$_J$ kommen hinzu:

Allquantorbeseitigung ($\forall$B)

$\forall v A(v) \vdash A(t)$

Restriktion:

1. v wird an allen Stellen in $A(v)$ durch t ersetzt.

Allquantoreinführung ($\forall$E)

$A(t) \vdash \forall v A(v)$

Restriktionen:

1. v kommt in $A(t)$ nicht vor.
2. (a) t wird an allen Stellen in $A(t)$ durch v ersetzt.
   (b) t kommt in keiner Formel vor, aus der $A(t)$ abgeleitet wird.

Existenzquantoreinführung ($\exists$E)

$A(t) \vdash \exists v A(v)$

Restriktionen:

1. v kommt in $A(t)$ nicht vor.
2. t wird an mindestens einer Stelle in $A(t)$ durch v ersetzt.

Existenzquantorbeseitigung (∃B)

$\exists v A(v), \Gamma, (A(t), \Gamma \vdash C) \vdash C$

Restriktionen:

1. In $A(v)$ werden alle Vorkommnisse von v durch t ersetzt.
2. t kommt
   (a) in $\exists v A(v)$ nicht vor.
   (b) in C nicht vor.
   (c) in den Formeln Γ nicht vor.

Regeln des GLK$_{Q+I}$

Zu den Regeln des GLK$_Q$ kommen hinzu:

Identitätseinführung (=E)

$\vdash t = t$

Identitätsbeseitigung (=B)

$t = s, A(t) \vdash A(s)$

$A(s)$ ist eine *wff*, in der t in $A(t)$ mindestens an einer Stelle durch s ersetzt wird.

Definitionen der Quantoren

Def. "∀"

$\forall v A(v) \dashv\vdash \neg\exists v \neg A(v)$

Def. "∃"

$\exists v A(v) \dashv\vdash \neg\forall v \neg A(v)$

Def. "¬∀"

$\neg\forall v A(v) \dashv\vdash \exists v \neg A(v)$

Def. "¬∃"

$\neg\exists v A(v) \dashv\vdash \forall v \neg A(v)$

Dualitätsgesetze

DG1: $\forall v(A(v) \to B(v)) \dashv\vdash \neg\exists v(A(v) \& \neg B(v))$

DG2: $\neg\forall v(A(v) \to B(v)) \dashv\vdash \exists v(A(v) \& \neg B(v))$

DG3: $\forall v(A(v) \to \neg B(v)) \dashv\vdash \neg\exists v(A(v) \& B(v))$

DG4: $\neg\forall v(A(v) \to \neg B(v)) \dashv\vdash \exists v(A(v) \& B(v))$

DG5: $\forall v(\neg A(v) \to B(v)) \dashv\vdash \neg\exists v(\neg A(v) \& \neg B(v))$

DG6: $\neg\forall v(\neg A(v) \to B(v)) \dashv\vdash \exists v(\neg A(v) \& \neg B(v))$

Klammergesetze

Aus/Einklammerung $\forall/\&$

$\forall v(A(v) \& B(v)) \dashv\vdash \forall v A(v) \& \forall v B(v)$

Aus/Einklammerung $\exists/\vee$

$\exists v(A(v) \vee B(v)) \dashv\vdash \exists v A(v) \vee \exists v B(v)$

Einklammerung $\forall/\vee$

$\forall v A(v) \vee \forall v B(v) \vdash \forall v(A(v) \vee B(v))$

Ausklammerung $\forall/\vee$

$\forall v(A(v) \vee B(v)) \vdash \forall v A(v) \vee \exists v B(v)$

Ausklammerung $\exists/\&$

$\exists v(A(v) \& B(v)) \vdash \exists v A(v) \& \exists v B(v)$

Ausklammerung $\forall/\to$

$\forall v(A(v) \to B(v)) \vdash \forall v A(v) \to \forall v B(v)$

Ausklammerung $\forall/\leftrightarrow$

$\forall v(A(v) \leftrightarrow B(v)) \vdash \forall v A(v) \leftrightarrow \forall v B(v)$

Ausklammerung $\exists/\to$ **bzw. Einklammerung** $\forall/\exists/\to$

$\exists v(A(v) \to B(v)) \dashv\vdash \forall v A(v) \to \exists v B(v)$

Aus/Einklammerung $\exists / \rightarrow$

$\exists v(A(v) \rightarrow B(v)) \vdash \exists v A(v) \rightarrow \exists v B(v)$

Aus dem GLK$_Q$ ableitbare Schlussregeln

Modus Ponendo Ponens (MPP$_Q$)

$A(t_1 ... t_x), \forall v_1 ... v_x(A(v_1 ... v_x) \rightarrow B(v_1 ... v_x)) \vdash B(t_1 ... t_x)$

$\exists v_1 ... v_x A(v_1 ... v_x), \forall v_1 ... v_x(A(v_1 ... v_x) \rightarrow B(v_1 ... v_x)) \vdash \exists v_1 ... v_x B(v_1 ... v_x)$

$\forall v_1 ... v_x A(v_1 ... v_x), \forall v_1 ... v_x(A(v_1 ... v_x) \rightarrow B(v_1 ... v_x)) \vdash \forall v_1 ... v_x B(v_1 ... v_x)$

Modus Tollendo Tollens (MTT$_Q$)

$\neg A(t_1 ... t_x), \forall v_1 ... v_x(B(v_1 ... v_x) \rightarrow A(v_1 ... v_x)) \vdash \neg B(t_1 ... t_x)$

$\neg \exists v_1 ... v_x A(v_1 ... v_x), \forall v_1 ... v_x(B(v_1 ... v_x) \rightarrow A(v_1 ... v_x)) \vdash \neg \exists v_1 ... v_x B(v_1 ... v_x)$

$\neg \forall v_1 ... v_x A(v_1 ... v_x), \forall v_1 ... v_x(B(v_1 ... v_x) \rightarrow A(v_1 ... v_x)) \vdash \neg \forall v_1 ... v_x B(v_1 ... v_x)$

Aus dem GLK$_{Q+I}$ ableitbare Schlussregeln

Symmetrieregel (Symm.$_{Q+I}$)

$a = b \dashv\vdash b = a$

Transitivitätsregel (Trans.$_{Q+I}$)

$a = b,\ b = c \vdash a = c$

Äquivalenz atomarer Formeln mit quantifizierten Sätzen (aF/$\exists$)

$\varphi t \dashv\vdash \exists v(v = t \,\&\, \varphi v)$

Syllogismen

S, M, P stehen für den Subjekt-, Mittel- und Prädikatbegriff.

Syllogismus Barbara

$\forall x(Mx \rightarrow Px), \forall x(Sx \rightarrow Mx) \vdash \forall x(Sx \rightarrow Px)$

Syllogismus Barbari

$\forall x(Mx \to Px), \forall x(Sx \to Mx), \exists x Sx \vdash \exists x(Sx \& Px)$

Syllogismus Celarent

$\neg\exists x(Mx \,\&\, Px), \forall x(Sx \to Mx) \vdash \neg\exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Celaront

$\neg\exists x(Mx \,\&\, Px), \forall x(Sx \to Mx), \exists x Sx \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Darii

$\forall x(Mx \to Px), \exists x(Sx \,\&\, Mx) \vdash \exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Ferio

$\neg\exists x(Mx \,\&\, Px), \exists x(Sx \,\&\, Mx) \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Cesare

$\neg\exists x(Px \,\&\, Mx), \forall x(Sx \to Mx) \vdash \neg\exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Cesaro

$\neg\exists x(Px \,\&\, Mx), \forall x(Sx \to Mx), \exists x Sx \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Camestres

$\forall x(Px \to Mx), \neg\exists x(Sx \,\&\, Mx) \vdash \neg\exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Camestros

$\forall x(Px \to Mx), \neg\exists x(Sx \,\&\, Mx), \exists x Sx \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Festino

$\neg\exists x(Px \,\&\, Mx), \exists x(Sx \,\&\, Mx) \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Baroco

$\forall x(Px \to Mx), \neg\forall x(Sx \to Mx) \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Darapti

$\forall x(Mx \to Px), \forall x(Mx \to Sx), \exists x Mx \vdash \exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Felapton

$\neg\exists x(Mx \,\&\, Px), \forall x(Mx \to Sx), \exists x Mx \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Disamis

$\exists x(Mx \,\&\, Px), \forall x(Mx \to Sx) \vdash \exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Datisi

$\forall x(Mx \to Px), \exists x(Mx \,\&\, Sx) \vdash \exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Bocardo

$\neg\forall x(Mx \to Px), \forall x(Mx \to Sx) \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Ferison

$\neg\exists x(Mx \,\&\, Px), \exists x(Mx \,\&\, Sx) \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Bamalip

$\forall x(Px \to Mx), \forall x(Mx \to Sx), \exists x Px \vdash \exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Calemes

$\forall x(Px \to Mx), \neg\exists x(Mx \,\&\, Sx) \vdash \neg\exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Calemos

$\forall x(Px \to Mx), \neg\exists x(Mx \,\&\, Sx), \exists x Sx \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Dimatis

$\exists x(Px \,\&\, Mx), \forall x(Mx \to Sx) \vdash \exists x(Sx \,\&\, Px)$

Syllogismus Fesapo

$\neg\exists x(Px \,\&\, Mx), \forall x(Mx \to Sx), \exists x Mx \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Syllogismus Fresison

$\neg\exists x(Px \,\&\, Mx), \exists x(Mx \,\&\, Sx) \vdash \neg\forall x(Sx \to Px)$

Fundamentaltheoreme der Quantorenlogik

Gesetz von der Identität (GVI$_Q$)

$\vdash \forall v(A(v) \to A(v))$
Bzw.: $\vdash \forall v(A(v) \leftrightarrow A(v))$

Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch (GVW$_Q$)

$\vdash \forall v\neg(A(v) \,\&\, \neg A(v))$

Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten (GVD$_Q$)

$\vdash \forall v(A(v) \vee \neg A(v))$

Gesetz vom nichtleeren Universum (GVU$_Q$)

$\vdash \exists v(A(v) \vee \neg A(v))$

Fundamentaltheoreme der Identität

Identitätsaxiom (Ax.=)

$\vdash \forall v\, v = v$

Symmetrie der Identität (Symm.=)

$\vdash \forall v_1 \forall v_2(v_1 = v_2 \ \rightarrow\ v_2 = v_1)$ bzw.
$\vdash \forall v_1 \forall v_2(v_1 = v_2 \ \leftrightarrow\ v_2 = v_1)$

Transitivität der Identität (Trans.=)

$\vdash \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3(v_1 = v_2 \,\&\, v_2 = v_3 \ \rightarrow\ v_1 = v_3)$